19

Министерство образования Иркутской области
ГБПОУ ИО «Бодайбинский горный техникум»

Утверждаю:
Зам. директора по УР
_________ Шпак М.Е.
«12» _________ 2018 г.

ГБПОУ ИО «БГТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Специальности СПО:	38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)
Форма обучения:	Очная, заочная

Рекомендовано методическим советом
ГБПОУ ИО «Бодайбинский горный техникум»
Заключение методического совета,
протокол № 01 от «01» 10 2018 г.
председатель методсовета
_____________/Шпак М.Е./

ГБПОУ ИО «БГТ»

Бодайбо, 2018

Комплект практических работ учебной дисциплины разработан на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по программам подготовки специалистов среднего звена:

38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям) (Приказ Минобрнауки России от 05.02.2018 N 69 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности **38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет** (по отраслям)" (Зарегистрировано в Минюсте России 26.02.2018 N 50137), квалификация бухгалтер.

Организация- разработчик: ГБПОУ ИО « Бодайбинский горный техникум»

Разработчик: Юрченко Т.Г. - преподаватель ГБПОУ ИО «Бодайбинский горный техникум»

Рассмотрены и утверждены на заседании предметно-цикловой комиссии

____

Протокол №_____ от «____»___________201__г.

Председатель ПЦК ___________________/__________/

Данное пособие содержит методические указания к практическим работам по дисциплине «Математика» и предназначена для обучающихся по специальностям среднего профессионального образования.

Цель разработки: оказание помощи обучающимся в выполнении практических работ по дисциплине ЕН.01 Математика.

Пояснительная записка

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Зачет по каждой практической работе студент получает после её выполнения и предоставления в печатном или электронном виде, оформления отчета в котором указывает полученные знания и умения в ходе выполнения практической работы, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

Содержание

Практическая работа №1

Тема: Комплексные числа и действия с ними.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами.

Теоретические сведения к практической работе

Комплексное число – это выражение вида

$$z = x + iy, \qquad (1.1)$$

где *x*, *y* – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, *x*, называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, *y*, - *мнимой частью* ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Числом, *сопряженным* к $z = x + iy$, называют число вида $\overline{z} = x - iy$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\overline{z} = x^2 + y^2$. Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6\,i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3 + 3i; \quad x_2 = 3 - 3i.$$

Справедливы следующие *правила арифметических действий над комплексными числами* $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1 y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ (эта операция возможна только в случае, когда $z_2 \neq 0 + i0 = 0$).

Пример 2. Вычислить $z = \dfrac{2-7i}{3+4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i;$$

поэтому $\operatorname{Re} z = -\dfrac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\dfrac{29}{25}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку *M(x;y)* на декартовой плоскости (при этом на оси *OX* располагаются вещественные числа $z = x + i0 = x$, а на оси *OY* – чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$).

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки *M*), т.е. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Аргументом комплексного числа ($\varphi = \mathrm{Arg}z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси OX. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0 \le \varphi < 2\pi$. При этом выражение вида

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (1.2)$$

называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

Преобразуем (1.1)

$$z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = |z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

и, сравнивая с (1.2), получаем, что аргумент *z* можно найти, решив систему

$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}\\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}\end{cases} \qquad (1.3.)$$

Пример 3. Записать комплексное число в тригонометрической форме $z = 1 - i\sqrt{3}$, указать модуль и аргумент комплексного числа.

Решение. По определению $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Для определения аргумента воспользуемся формулой: $\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\\ \sin\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$. Получаем, что $\varphi = \arg z = \dfrac{5\pi}{3}$.

Тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид: $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Возведение в степень и извлечение корней. Если комплексное число задано тригонометрической формой $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то справедлива формула Муавра

$$z^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right). \qquad (1.4)$$

Для извлечения корня *n*-й степени (*n* – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая *n* значений этого корня:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,\ldots,n-1. \qquad (1.5)$$

Пример 4. Вычислить: a) $(-1+i)^{13}$; b) $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. В задании a), чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме. Имеем: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = -1/\sqrt{2}$ и $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$, т.е. $\varphi = 3\pi/4$ (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно,

$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ и $(-1+i)^{13}=\sqrt{2^{13}}\left(\cos\frac{3\cdot 13\pi}{4}+i\sin\frac{3\cdot 13\pi}{4}\right)$ (в силу (1.4)). Учитывая что $\frac{39\pi}{4}=10\pi-\frac{\pi}{4}$ и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

$$(-1+i)^{13}=64\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)=64\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=64-64i.$$

В задании b) тригонометрическая форма заданного числа имеет вид $-1=\cos\pi+i\sin\pi$ (|z|=*1*), поэтому в силу (1.5)

$$z_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

Выписываем три искомых корня:

$$z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1=\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$$z_2=\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить, выписать вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел.

1) $(2-3i)-(1+i)(2i-1)$ 2) $\frac{2+3i}{1-i}$ 3) $6i+\frac{1+7i}{2-3i}$

4) $(3+i)\frac{1+i}{1-i}$ 5) $\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{i-\sqrt{3}}$ 6) $(1+2i)^3-3$

7) $(1-i)^2+i^4$

Задание 2. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической форме: 1) $-3i$; 2) $2+i$; 3) $3+3i$; 4) $2-5i$ 5) $7+8i$ 6) $10-5i$ 7) $2-4i$.

Задание 3. Найти все корни уравнений:

1) $x^2+9=0$; 2) $x^2-3x+10=0$; 4) $x^2-2x+10=0$; 5) $x^2+2x+10=0$; 6) $x^4-16=0$ 7) $x^2+100=0$

Практическая работа №2

Тема: Матрицы и действия с ними. Определитель матрицы.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

Теоретические сведения к практической работе

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица B имеет размер mxn» означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер *2*x*3*. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на i-*ю* строку матрицы A используют обозначение A_i, при ссылке на j-*й* столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы A (размера nxn) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера *3*x*3*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица A является верхней треугольной, B – диагональной, C – нижней треугольной, E – единичной.

Матрицы A, B называются *равными* ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}= .$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=$

$$=2(-1\cdot 0-2\cdot 5)+3(4\cdot 0-2\cdot 3)-1(4\cdot 5-(-1)\cdot 3)=-20-18-23=-61.$$

Произведение AB можно определить только для матриц *A* размера *m*x*n* и *B* размера *n*x*p*, при этом *AB=C*, матрица *C* имеет размер *m*x*p,* и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B:* $c_{ij}=A_i B^j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы *A 3*x*2*, матрицы *B 2*x*2*. Поэтому произведение *AB* найти можно, произведение *BA* – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4) \\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице *A* размера *m*x*n,* называется матрица A^T размера *n*x*m,* строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы А, В называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы *A* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение *r(A).* Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.* Можно доказать, что ранг матрицы *A* (размера *m*х*n*) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы *A* размера *2*х*3* $r(A)\le 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице *B* можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3=-C_2$):

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3-3C_1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & 0 & -4 & -9 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителей. Определитель матрицы *A* размера *2*х*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой $\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Содержание практической работы

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 2. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

Задание 4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

Практическая работа №3

Тема: Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения.

Цель: сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений

Теоретические сведения к практической работе

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) произвольной размерности, состоящие из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (*)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы (*), называется матрицей системы (ее размер – mхn), а вектор $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ (m-мерный)-столбцом (вектором) свободных членов. Матрицу вида $\left(A|B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называют расширенной матрицей системы (*). Любой набор значений неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, образующих n-мерный вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, является решением системы (*), если эти числа удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). Очевидно, что $b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$ при каждом $i=1,2,…,m$ (i-*е* уравнение представляет собой скалярное произведение i-*й* строки матрицы системы на вектор X), и (*) можно переписать в виде

$$AX = B. \qquad (**)$$

Запись (**) называется "матричной (векторной) формой записи" системы (*).

Пример 1. Выписать матрицу коэффициентов и столбец свободных членов для СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}.$$

Решение. Очевидно, что $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -7\\ 6 & -3 & 2 & -4\\ 4 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5\\ 7\\ 10\end{pmatrix}$.

Пример 2. Записать СЛАУ, если $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2 & 0\\ 1 & 7 & 0 & 8\\ 0 & -2 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ -4\\ 8\end{pmatrix}$.

Решение. Введем в рассмотрение вектор *X* и с каждым столбцом мысленно сопоставим неизвестное: с первым столбцом - x_1, со вторым - x_2, с третьим - x_3, с четвертым - x_4. Окончательно нужная система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases}3x_1+4x_2-2x_3=2\\ x_1+7x_2+8x_4=-4\\ -2x_2+3x_3+5x_4=8\end{cases}.$$

Классификация систем линейных алгебраических уравнений. Определения и основные теоремы. Если СЛАУ (*) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной* (соответственно, система *несовместная*, если она вообще не имеет решений). Совместная система (*) называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (*) будем называть *приведенной* (а саму систему *канонической*), если в каждой *i-й* строке *(i=1,2,…,m)* есть элемент $a_{ij}=1$, а все остальные элементы *j-го* столбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть *ведущими,* а оставшиеся неизвестные назовем *свободными*.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли). СЛАУ (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е выполняется равенство $r(A)=r(A|B)$.

Для совместной системы число $r=r(A)=r(A|B)$ назовем рангом системы.

Теорема 2 (о количестве решений). Пусть СЛАУ (*) совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных ($r=n$), то система является определенной; если ранг системы меньше числа неизвестных ($r<n$), то исходная система – неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется *общим решением системы.*

Алгоритм метода Гаусса. Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. *Прямой ход.* Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если $r(A)=r(A|B)$, то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. *Обратный ход*. Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

Пример 3. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11. \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3=C_3-2C_1]{C_2=C_2+4C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3+C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3=C_3/10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 во второй и x_1 в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг равен 3: $r(A|B)=r(A)=3=r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса (теперь необходимо получать нули НАД ведущими элементами).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1=C_1-2C_3]{C_2=C_2-11C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[C_2=-C_2/6]{C_1=C_1-C_2/6} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Теперь составляем по последней матрице систему $\begin{cases} -x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$ и выписываем значения неизвестных в порядке их номеров: $X=(3;1;1)^T$. Это и есть ответ.

Пример 4. Для СЛАУ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 10x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 16 \end{cases}$ найти общее и два частных решения.

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\6&8&2&5&7\\10&12&3&10&16\end{array}\right)\xrightarrow[C_3=C_3-3C_1]{C_2=C_2-2C_1}\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\0&0&0&1&1\\1&0&0&4&7\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{C_3\leftrightarrow C_2}\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\1&0&0&4&7\\0&0&0&1&1\end{array}\right).$$

Очевидно, что $r(A|B)=r(A)=3=r$, число неизвестных $n=4$ и в соответствии с теоремой 6.2 исходная система является неопределенной. Ведущие неизвестные: x_3 в первой строке, x_1 во второй, x_4 в третьей. Свободное неизвестное - x_2. Обратным ходом преобразуем матрицу к приведенному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\1&0&0&4&7\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[C_1=C_1-2C_2]{C_2=C_2-4C_3}\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&0&1\\1&0&0&0&3\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{C_1=C_1-3C_2}\left(\begin{array}{cccc|c}0&4&1&0&-8\\1&0&0&0&3\\0&0&0&1&1\end{array}\right).$$

Выписываем полученную систему и ведущие неизвестные выражаем через свободные: $\begin{cases}4x_2+x_3=-8\\ x_1=3\\ x_4=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=-8-4x_2\\ x_1=3\\ x_4=1\end{cases}$. Общее решение записываем в порядке нумерации неизвестных: $X_{об}=(3;\quad x_2;\quad -8-4x_2;\quad 1)^T$, x_2 - любое вещественное число.

Частное решение можно получить, если придать свободному неизвестному x_2 конкретное числовое значение. Например, при $x_2=0$ $X_ч=(3;0;-8;1)^T$, а при $x_2=-1$ $X_ч=(3;-1;-4;1)^T$.

Теорема Крамера. Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}. \qquad (*)$$

Теорема 3 (теорема Крамера). Если определитель матрицы системы (*) отличен от нуля ($|A|\neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i=\frac{|A|_i}{|A|},\quad i=1,2,\ldots,n$$

где $|A|_i$- определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены *i-го* столбца на столбец свободных членов.

Пример 5. Решить систему $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов: $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ 11\\ 11\end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=2(16-4)-(-1)(12+16)-1(-6-12)=60\neq 0;$$

$$|A|_1=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 11 & 4 & -2\\ 11 & -2 & 4\end{vmatrix}=4(16-4)-(-1)(44+22)-1(-22-44)=180;$$

$$|A|_2=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 11 & -2\\ 3 & 11 & 4\end{vmatrix}=2(44+22)-4(12+6)-1(33-33)=60;$$

$$|A|_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 11\\ 3 & -2 & 11\end{vmatrix}=2(44+22)-(-1)(33-33)+4(-6-12)=60.$$

По теореме Крамера $x_1=\dfrac{|A|_1}{|A|}=\dfrac{180}{60}=3$; $x_2=\dfrac{|A|_2}{|A|}=\dfrac{60}{60}=1$; $x_3=\dfrac{|A|_3}{|A|}=\dfrac{60}{60}=1$.

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2\cdot 3-1-1\equiv 4$, $3\cdot 3+4\cdot 1-2\cdot 1\equiv 11$, $3\cdot 3-2\cdot 1+4\cdot 1\equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Содержание практической работы

Задание 1. По расширенной матрице выписать СЛАУ.

1) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}8 & -2 & 5 & 6 & -4\\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15\end{array}\right)$

2) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 3 & -4 & 1\\ 12 & 0 & 1 & 11\\ 5 & 4 & 10 & -3\end{array}\right)$

3) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccccc|c}2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12\\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3\\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$

4) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & -3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1\\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6\end{array}\right)$

Задание 2. Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

1) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=2\\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_3=1\end{cases}$

2) $\begin{cases}3x_1+x_2+3x_3=2\\ 5x_1-2x_2+2x_3=1\\ 2x_1+2x_2+3x_3=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5\\ 2x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+3x_2+4x_3=1\end{cases}$

4) $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=9\\ -2x_1+3x_2-4x_3=-16\\ x_1+6x_3=13\end{cases}$

Задание 3. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 20 \end{cases}$

Практическая работа № 4

Тема: Функции одной переменной и их свойства.

Цель: сформировать умение использовать свойства функции для ее исследования, решать задачи и упражнения по данной теме.

Теоретические сведения к практической работе

Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент y множестваY, то говорят, что на множестве X определена функция со значениями в множестве Y, и записывают y=f(x).

Множество X называется областью определения функции D(f), а множество Y – областью значений функции E(f).

Пример 1. Найти область определения функции

$1)\, y = \frac{15}{x+6}$

$x + 6 \neq 0$

$x \neq -6$

$D(\mathrm{y}) = (-\infty; -6) \cup (-6; \infty)$

$2)\, y = \frac{x+13}{x^2 - 7x + 12}$

$y = \frac{x+13}{x^2 - 7x + 12} = \frac{x+13}{(x-3)(x-4)}$

$x - 3 \neq 0 \quad x - 4 \neq 0$

$x \neq 3 \quad x \neq 4$

$D(\mathrm{y}) = (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; \infty)$

$3)\, y = \sqrt{x^2 - 81}$

$x^2 - 81 \geq 0$

$(x-9)(x+9) \geq 0$

$D(\mathrm{y}) = (-\infty; -9] \cup [9; \infty)$

Основные свойства функции:

1. Четность и нечетность. Функция y=f(x) называется четной, если для любых значений x из области определения f(-x)=f(x), и называется нечетной, если f(-x)=-f(x). В противном случае функция y=f(x) называется функцией общего вида.

   Пример 2. Установить четность или нечетность функции.

$$1)\, y = x^2 + 6$$
$$y(-\text{x}) = (-x)^2 + 6 = x^2 + 6 = y(\text{x})$$
$$\Rightarrow \quad \textit{функция} \quad \textit{четная}$$
$$2)\, y = \sin x + 2x$$
$$y(-x) = \sin(-x) + 2(-x) = -\sin x - 2x = -(\sin x + 2x) = -y(\text{x})$$
$$\Rightarrow \quad \textit{функция} \quad \textit{нечетная}$$
$$3)\, \text{y} = \frac{x+2}{x^2-16}$$
$$\text{y}(-x) = \frac{(-x)+2}{(-x)^2-16} = \frac{-x+2}{x^2-16}$$
$$\Rightarrow \quad \textit{функция} \quad \textit{общего} \quad \textit{вида}$$

2. Монотонность. Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке X из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.
3. Ограниченность. Функция y=f(x) называется ограниченной на некотором промежутке X из области определения, если существует число M>0, такое, что $|f(\text{x})| \le M$ для любого $x \in X$.
4. Периодичность. Функция y=f(x) называется периодической с периодом T>0, если для любых значений x из области определения f(x+T)=f(x-T)=f(x).

Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция спроса, и пишут q=f(p).

Эта функция определена для тех значений $p \ge 0$, для которых $f(p) \ge 0$ и множество ее значений $q \ge 0$.

График функции спроса называют кривой спроса.

Пример 3. Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q = 60 - \sqrt{100 + p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений этой функции
- Функцию цены в виде $p = f^{-1}(\text{q})$
- Объем спроса при ценах на товар: $p_1 = 300; p_2 = 800$
- Цену за единицу товара, если $q_1 = 10; q_2 = 15$,
- Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Решение: 1) Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} p \ge 0 \\ 100 + p \ge 0 \\ 60 - \sqrt{100+p} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \\ \sqrt{100+p} \le 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \\ 100 + p \le 3600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \\ p \le 3500 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le p \le 3500$$

$$\text{D}(f) = [0; 3500]$$

Выразим значение p через q:

$$\sqrt{100 + p} = 60 - q$$
$$100 + p = (60 - q)^2$$
$$100 + p = 3600 - 120q + q^2$$
$$p = q^2 - 120q + 3500$$
$$p \ge 0, \quad q^2 - 120q + 3500 \ge 0$$
$$q \in (-\infty; 50] \cup [70; \infty)$$
$$q \ge 0, \quad q \in [0; 50] \cup [70; \infty)$$

Из закона спроса следует, что с увеличением цены p от нуля до 3500 руб. спрос должен падать. В нашем случае функция q убывает в промежутке $q \in [0;50]$, следовательно, множество значений функции $E(f) \in [0;50]$.

1) Функция цены имеет вид $p = q^2 - 120q + 3500$

2) $p_1 = 300 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{100+300} = 60 - 20 = 40 \quad (тыс.шт.)$;
$p_2 = 800 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{100+800} = 60 - 30 = 30 \quad (тыс.шт.)$;

3) $q_1 = 10 \Rightarrow p_1 = 100 - 120 \cdot 10 + 3500 = 2400 \quad (руб.)$;
$q_2 = 15 \Rightarrow p_2 = 225 - 120 \cdot 15 + 3500 = 1925 \quad (руб.)$.

4) Выручка от продажи составляет $u = pq$, следовательно,
$u_1 = p_1 \cdot q_1 = 2400 \cdot 10 = 24000(\text{руб.})$
$u_2 = p_2 \cdot q_2 = 1925 \cdot 15 = 28875(\text{руб.})$

Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое производители готовы продать по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция предложения, и пишут q=φ(p).

Эта функция определена для тех значений $p \geq 0$, для которых $\varphi(p) \geq 0$ и множество ее значений $q \geq 0$.

Пример 4. Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q = \frac{1}{9}(\text{p}-2)^2 - 1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений функции q
- Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1 = 11; p_2 = 20$
- Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию $p = \varphi^{-1}(\text{q})$

Решение: 1) Найдем область определения:

$$\frac{1}{9}(\text{p}-2)^2 - 1 \geq 0$$

$$(\text{p}-2)^2 - 9 \geq 0$$

$$(p-2-3)(p-2+3) \geq 0$$

$$(p-5)(p+1) \geq 0$$

$$p \in (-\infty;-1] \cup [5;\infty)$$

$$Т.к.\, p \geq 0 \Rightarrow \quad p \in [5;\infty)$$

Множество значений функции q при $p \geq 5$ будет $q \in [0;+\infty)$.

1) При
$$p_1 = 11; \text{q}_1 = \frac{1}{9}(11-2)^2 - 1 = 9 - 1 = 8(тыс.шт.)$$
$$p_2 = 20; \text{q}_2 = \frac{1}{9}(20-2)^2 - 1 = 36 - 1 = 35(тыс.шт.)$$

2) Найдем функцию $p = \varphi^{-1}(\text{q})$

$$q=\frac{1}{9}(\text{p}-2)^2-1$$

$$\frac{1}{9}(\text{p}-2)^2=q+1$$

$$(\text{p}-2)^2=9\left(q+1\right)$$

$$p-2=\pm\sqrt{9\left(q+1\right)}$$

$$p-2=\pm 3\sqrt{\left(q+1\right)}$$

$$p=2+3\sqrt{\left(q+1\right)}\quad p=2-3\sqrt{\left(q+1\right)}$$

$$\text{Т}.к.\, p\geq 5,\quad p=2+3\sqrt{\left(q+1\right)}$$

Содержание практической работы:

Задание 1. Найти область определения функции

$1)y=\dfrac{32+x}{\left(x-4\right)\left(x+9\right)}$

$2)y=\dfrac{29-x}{x^2+15x}$

$3)y=\dfrac{4x}{x^2-5x+6}$

$4)y=\sqrt{x^2-100}$

$5)\ \text{y}=\log_6(\text{x}-3)$

$6)y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\left(x-3\right)\left(x+1\right)}$

Задание 2. Установить четность или нечетность функции.

$1)y=x^4-x^2+3$

$2)y=\dfrac{x^5+9}{x}$

$3)y=-\sin x-4x$

$4)y=e^x+12$

$5)\ \text{y}=\dfrac{x^2+2}{x^2-16}\cdot\cos x$

$6)\ \text{y}=\text{tgx}-2\,\text{x}$

Задание 3. а) Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q=70-\sqrt{250+p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений этой функции
- Функцию цены в виде $p=f^{-1}(\text{q})$
- Объем спроса при ценах на товар: $p_1=150; p_2=650$
- Цену за единицу товара, если $q_1=15; q_2=20$,
- Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

б) Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q=40-\sqrt{50+p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений этой функции
- Функцию цены в виде $p = f^{-1}(\text{q})$
- Объем спроса при ценах на товар: $p_1 = 175; p_2 = 350$
- Цену за единицу товара, если $q_1 = 10; q_2 = 30$,
- Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Задание 4. а) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q = \frac{1}{4}(\text{p}-3)^2 - 1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); р – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений функции q
- Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1 = 7; p_2 = 11$
- Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию $p = \varphi^{-1}(\text{q})$

б) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q = \frac{1}{16}(\text{p}-5)^2 - 1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); р – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений функции q
- Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1 = 37; p_2 = 53$
- Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию $p = \varphi^{-1}(\text{q})$

Практическая работа №5

Тема: Предел последовательности и предел функции. Замечательные пределы.

Цель: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in R : n \ge 1\}$.

Число a называется пределом последовательности

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$$

$$\forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2}$

Решение $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{6}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(10-\frac{8}{n}+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{1}{10}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1}$$

Пример 2. Вычислить предел

Решение $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(12+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0}{12} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{7n-8}$$

Пример 3. Вычислить предел

Решение $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{7n-8}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{6}{n^2})}{n^2(\frac{7}{n}-\frac{8}{n^2})}=\frac{1}{0}=\infty$

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{2n+8}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+8)-(n-1)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8-n+1}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Число *A* называют *пределом функции f*(*x*) при $x\to x_0$ (и пишут $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0,$ зависящее от , такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon.$

Теоремы о пределах:

1. $\lim_{x\to x_0}c=c$ (*c*=const).
2. Если $\lim_{x\to x_0}f(x)=A,$ $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел (число *e* = 2,718…):

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x\cdot 8}{6\cdot 8x}=\frac{5\cdot 8}{6}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x}=5$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)}=e^{\frac{5}{3}}$

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^{x}$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^{x}\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+3}{x^2+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{\frac{x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}}=e^{0}=1$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0}f(x),$ нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c=\text{const},\quad c\neq 0,\quad c\neq\infty,$ то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$\frac{0}{c}\to 0;\ \ \frac{c}{0}\to\infty;\ \ \frac{\infty}{c}\to\infty;\ c\cdot\infty\to\infty;\ c\cdot 0\to 0;\ \ a^{\infty}\to 0,$ если $0<a<1;$ $a^{\infty}\to\infty,$ если $a>1$.

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \left(\frac{0}{0}\right);\ (0\cdot\infty);\ (\infty-\infty);\ (1^{\infty});\ (\infty^{0});\ (0^{0}).$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\cdot 1^3+15}{10\cdot 1^2-4}=\frac{2+15}{10-4}=\frac{17}{6}$

Пример 10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x+4)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(4+4)}{(4-1)}=\frac{8}{3}$

Пример 11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{((2x+8)-(23-x))}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot 5+8}+\sqrt{23-5}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{18}}=\frac{3}{2\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

$1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5}$ $2)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2n}{n+6}$ $3)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n+3}{1+2n}$

$4)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+16}{9n}$ $5)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$ $6)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$

$7)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ $8)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n}$ $9)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

$1)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}$ $2)\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x}$ $3)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$

$4)\lim\limits_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}$ $5)\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ $6)\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$

$7)\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$ $8)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}$ $9)\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$

Задание 3. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$$1)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1} \qquad 2)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x} \qquad 3)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$4)\lim_{x\to 0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}} \qquad 5)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin 4x} \qquad 6)\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 4x}$$

$$7)\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{tgx} \qquad 8)\lim_{x\to 0}\frac{9\ln(1-2\,\mathrm{x})}{4arctg3x} \qquad 9)\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$$

Практическая работа № 6

Тема: Производная и ее геометрический смысл. Правило Лопиталя.

Цель: сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

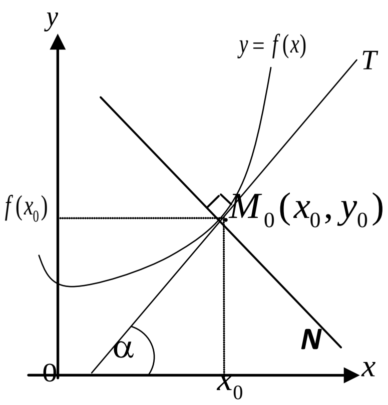
$$y' = f' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$$f'(x_0),\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0},\quad \frac{df(x_0)}{dx},\quad \left.y'_x\right|_{x_0},\quad y'(x_0) \text{ и другие.}$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.



Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad (2)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (3)$$

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)],\ y' = f'_u \cdot u'_x$

II	$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$		**VII**	Функция задана параметричес-кими уравнениями $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.
III	$(c\cdot u)'=c\cdot u',\quad c=\text{const}$			
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2},\ (v(x)\neq 0)$		**VIII**	Если $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$, $(y'_x\neq 0)$.
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)'=-\dfrac{c\cdot v'}{v^2},\quad c=\text{const}\quad (v(x)\neq 0)$			

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u=u(x)$ — дифференцируемая функция		
1	$C'=0$	**9**	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
2	$x'=1$	**10**	$(\text{tg}u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$	**11**	$(\text{ctg}u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad \lvert u\rvert<1$
5	$(e^u)'=e^u\cdot u'$	**13**	$(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad \lvert u\rvert<1$
6	$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}\quad (u>0)$	**14**	$(\text{arctg}u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}\quad (u>0)$	**15**	$(\text{arcctg}u)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$		

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y''=(y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y'''=(y'')'$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y=3x^5+\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{4}{x^3}$; *б*) $s=(e^t-2\ln t)\sin t$; *в*) $u=\text{ctg}^3\dfrac{v}{3}$; *г*) $z=\dfrac{\text{arctg}2t}{1+4t^2}$.

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$

$$= 3{\cdot}5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t=1, получим:□

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$

$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v=1;□используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$

$$= 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что t=1, получим:□

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg}2t(0+4{\cdot}2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2 - 8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x^2 - 3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

1) $y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2 - 3} = 1;$

2) $y'(x) = ((x^2-3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}};$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2-3}} = 2.$$

Подставим x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1 + 2(x-2)$, или $2x - y - 3 = 0$ — уравнение касательной.

$y = 1 - \frac{1}{2}(x-2)$, или $x + 2y - 4 = 0$ — уравнение нормали.

Пример 3. Найти производную y'_x, если функция задана парамет-рически:

$$\begin{cases} x = \ln(5-2t) \\ y = \operatorname{arctg}(5-2t). \end{cases}$$

Используем правило VII $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$\begin{cases} x'_t = \dfrac{(5-2t)'}{5-2t} = \dfrac{-2}{5-2t} \\ y'_t = \dfrac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2} = \dfrac{-2}{1+(5-2t)^2}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} : \frac{-2}{5-2t} = \frac{5-2t}{1+(5-2t)^2} = \frac{5-2t}{4t^2-20t+26}.$$

Пример 4. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x + \cos 2x$; *б*) $u = 3 + e^{-x}$; *в*) $s = \ln 3t$.

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx$, т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение.

а) $dy = (x + \cos 2x)'dx = (1 - \sin 2x \cdot 2)dx = (1 - 2\sin 2x)dx.$

б) $du = (3 + e^{-x})'dx = e^{-x}(-1)dx = -e^{-x}dx.$

в) $ds = (\ln 3t)'dt = \dfrac{(3t)'}{3t}dt = \dfrac{3}{3t}dt = \dfrac{1}{t}dt.$

Пример 5. Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x$.

Решение. $y'' = (y')'$, поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2\ln x + 1))' = x'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' = 2\ln x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = x^x$ логарифмическим дифференцированием

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$\left(\ln y\right)' = \left(x \cdot \ln x\right)'$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y\left(\ln x + 1\right)$$

$$y' = x^x \cdot \left(\ln x + 1\right)$$

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (5)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5).

Пример 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6};\quad б)\ \lim_{x\to -7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14};$$

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо *x* предельное значение ∞, определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty}(4x^3+2x-3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(4+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=\infty\cdot 4=\infty,\ \text{т. к. } \frac{2}{x^2}\to 0,\ \frac{3}{x^3}\to 0.$$

Аналогично: $\lim_{x\to\infty}(x^2+6)=\infty.$

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+2x-3)'}{(x^2+6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+2)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{2}=\lim_{x\to\infty}12x=\infty.$$

$$б)\ \lim_{x\to -7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to -7}\frac{2(-7)^2+15(-7)+7}{(-7)^2+5(-7)-14}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to -7}\frac{(2x^2+15x+7)'}{(x^2+5x-14)'}=\lim_{x\to -7}\frac{4x+15}{2x+5}=\lim_{x\to -7}\frac{4(-7)+15}{2(-7)+5}=\frac{-13}{-9}=\frac{13}{9}.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) $a)\ y=3x^3-\frac{5}{x^7}-\sqrt[4]{x^5}$; $б)\ s=(1+t^2)(2-3\operatorname{arcctg}t)$; $в)\ u=\ln^3\frac{V}{2}$; $г)\ z=\frac{5-\sin 3t}{e^{4t}}$.

2) $a)\ y=5x-\frac{2}{x^4}+3\sqrt[5]{x^6}$; $б)\ s=(4-3\ln t)(5+2\sin t)$; $в)\ u=\sin^4(2V+3)$; $г)\ z=\frac{\sin(2-t)}{2-\ln 3t}$.

3) $a)\ y=7x^2+\frac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2}$; $б)\ s=(3-\cos t)(5+6\sin t)$; $в)\ u=\sqrt[3]{1-4V^2}$; $г)\ z=\frac{t^3-e^{3t}}{\arccos 2t}$.

4) $a)\ y=5x^2+\frac{3}{x^4}-\sqrt[6]{x^7}$; $б)\ s=(3t^3-4)(t-2\cos t)$; $в)\ u=\ln^2(5V-3)$; $г)\ z=\frac{\ln(4-5t)}{\sin t}$.

5) *а)* $y = x^5 - \dfrac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5}$; *б)* $s = t^4(4 + \text{arctg}t)$; *в)* $u = \cos^3(3V + 1)$; *г)* $z = \dfrac{t - \arcsin 5t}{e^{-t}}$.

6) *а)* $y = x^4 + \dfrac{1}{x} - 2\sqrt[3]{x}$; *б)* $s = (3 + \text{tg}t)(1 - 4\text{ctg}t)$; *в)* $u = tg^4(3V + 2)$; *г)* $z = \dfrac{\text{arctg}2t}{1 + 4t^2}$.

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1) $\dfrac{x^2 - 3}{x}$, $x_0 = 1$.
2) $\sqrt{5 - x^2}$, $x_0 = 2$.
3) $\dfrac{x^2 + 3x}{3}$, $x_0 = -1$.
4) $\sqrt{x} + 2x$, $x_0 = 9$.
5) $\dfrac{x^2}{x - 2}$, $x_0 = 1$.
6) $\sqrt{1 + 3x}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y'_x функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

1) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \cos(2t + 6) \\ y = \sin(2t + 6) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = (1 - t)^2 \\ y = \cos(t - 1) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \text{tg}t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1 - 4t)^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = c\text{tg}t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

Задание 4. Найти дифференциалы функций:

1) $y = \sin 2x + 5$;
2) $y = \ln x - x^3$;
3) $y = 4 + 8\sin x$;
4) $y = 2x - 1$.
5) $y = 1 - \cos x$;
6) $y = 10 - 3x^2$

Задание 5. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) $y = \ln x + 9$
2) $y = \cos x - \ln x$
3) $y = \text{sinx} + x^4$
4) $y = x^2 + \sin x$

5) $y = x + \ln x$

6) $y = 3e^{x} + 2x$

Задание 6. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием

1) $y = (\sin x)^{\cos x}$

2) $y = (\cos x)^{x}$

3) $y = x^{\ln x}$

4) $y = (\sin x)^{\ln x}$

5) $y = x^{\cos x}$

6) $y = (tgx)^{\ln x}$

Задание 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16 - x^2}{x^2 - 5x + 4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x} - 1}{\operatorname{arctg} x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1 - \cos x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2 - 5x + 1}{1 - 3x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x} - 1}{\sin 3x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Практическая работа № 7

Тема: **Нахождение неопределенных интегралов**

Цель: закрепить навыки нахождения неопределенных интегралов методами непосредственного интегрирования и подстановки.

Материальное обеспечение: методические указания, таблица интегралов (формул и правил интегрирования).

Вводный контроль:

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называют неопределенным интегралом? Запишите общую формулу.
3. Перечислите свойства неопределенного интеграла, запишите их в виде формул.
4. Запишите формулу неопределенного интеграла от степенной функции, докажите ее.
5. В каких случаях интегрирования применяется метод подстановки? В чем состоит этот метод?

Порядок выполнения работы

Задание 1. Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования.

а) $\int\left(3x^{-4}+8x^{-5}\right)dx=3\int x^{-4}dx+8\int x^{-5}dx=3\frac{x^{-3}}{-3}+8\frac{x^{-4}}{-4}+C=\frac{-1}{x^3}-\frac{2}{x^4}+C$

б) $\int x^3(1-6x^2)dx=\int x^3dx-6\int x^5dx=\frac{x^4}{4}-\frac{6x^6}{6}+C=\frac{x^4}{4}-x^6+C$

в) $\int(3^x-e^x-1)dx=\int 3^x dx-\int e^x dx-\int dx=\frac{3^x}{\ln 3}-e^x-x+C$

г) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$, умножив числитель и знаменатель на $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получим:

$$\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 xdx}{\sin^2 x\cos^2 x}+\int\frac{\cos^2 xdx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=tgx-ctgx+C$$

Задание 2. Найти неопределенные интегралы методом подстановки

а) $\int\sqrt{\left(3z^4+2\right)^3}z^3dz$

Обозначим $3z^4+2=t$, тогда

$dt=\left(3z^4+2\right)'dz=12z^3dz$

$z^3dz=\frac{1}{12}dt$

Получим интеграл

$$\int\sqrt{t^3}\cdot\frac{1}{12}dt=\frac{1}{12}\int t^{\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{12}\cdot\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{5}\cdot t^{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{30}\sqrt{\left(3z^4+2\right)^5}+C$$

б) $\int\frac{\left(5\ln x-1\right)^3}{x}dx$

Обозначим $5\ln x-1=t$, тогда

$dt=\left(5\ln x-1\right)dx=\frac{5dx}{x}$

$\frac{dx}{x}=\frac{1}{5}dt$

Получим интеграл

$$\int t^3\cdot\frac{1}{5}dt=\frac{1}{5}\cdot\int t^3dt=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{20}\cdot\left(5\ln x-1\right)+C$$

Решить примеры по индивидуальному варианту:

Вариант № 1

1. Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования:

а) $\int(x^{-4}-x^{-3}-3x^{-2}+1)dx$ б) $\int 5^x dx$ в) $\int(e^x+2x-\frac{1}{x})dx$ г) $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx$

2. Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

а) $\int(x^2+3)^5 xdx$ б) $\int\frac{x^3}{(5x^4+3)^4}dx$ в) $\int\sqrt{e^x+1}e^x dx$

г) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin x}}$ д) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{(5x^4+2)^2}}$ е) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$

Вариант № 2

1. Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования:

а) $\int 3(x-2)dx$ б) $\int (4x^3+4x^{-2}-3)dx$ в) $\int \left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$ г) $\int (2e^x-3\cos x)dx$

2. Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

а) $\int \sin(1-t)dt$ б) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$ в) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$

г) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ д) $\int \sqrt[5]{(x+4)^2}dx$ е) $\int e^{3-2x}dx$

Вариант № 3

1. Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования:

а) $\int (x+3)^2 dx$ б) $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ в) $\int (x-5e^x)dx$ г) $\int \frac{\sin^2 t-2}{\sin^2 t}dt$

2. Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

а) $\int 3^{-t+2}dt$ б) $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}dx$ в) $\int e^{\cos x}\sin x dx$

г) $\int \frac{3\ln x-5}{x}dx$ д) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}dx$ е) $\int \frac{2x^3}{(x^4-5)^8}dx$

Практическая работа №8

Тема: Интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенные и определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C$, где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$

2. $\int dF(x) = F(x) + C;$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad k$ — const;

4. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du = C; \quad C = \text{const};$

2. $\int du = u + C;$

3. $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

3а. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$

6. $\int e^u du = e^u + C;$

7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$

8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

13. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C;$

15. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

17. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5}\right)dx; \qquad б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2} + 3\cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение.

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\\text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\\text{множители вынесем за знак интегралов}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{matrix}\text{используем табличные}\\\text{интегралы 12, 4, 3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

Проверка:

$$\left(5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C\right)'=5\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|\right)'-$$

$$-3\left(\ln|x|\right)'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'+\frac{12}{11}\left(x^{11/6}\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\\text{4, 3, 1 таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)'}{x+\sqrt{x^2+7}}-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}(-3)x^{-3-1}+\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{6}\cdot x^{11/6-1}=5\cdot\frac{1+\frac{\left(x^2+7\right)'}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}=5\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=5\frac{\sqrt{x^2+7}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\text{ — верно.}$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int5^xdx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int5^xdx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\\text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{matrix}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln5}+$$

$$+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln5}+4x-\frac{1}{2}x^2+C\right)'=\frac{5}{\sqrt{22}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'+$$

$$+\frac{3}{\ln5}\left(5^x\right)'+4x'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы 14, 5, 2, 3, 1}\\\text{таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{22}}\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'}{1+\frac{11}{2}x^2}+\frac{3}{\ln 5}\cdot 5^x\ln 5+4\cdot 1-\frac{1}{2}2x^{2-1}=\frac{5}{\sqrt{22}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}}+$$

$$+3\cdot 5^x+4-x=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}}\frac{\sqrt{11}\cdot 2}{\sqrt{2}\left(2+11x^2\right)}+3\cdot 5^x+\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}=$$

$$=\frac{5}{2+11x^2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\ \text{— верно.}$$

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$$а)\ \int\cos 4x dx;\ \ б)\ \int e^{9x+1}dx;\ \ в)\int x(2-x^2)^5dx$$

Решение:

$$а)\ \int\cos 4xdx=\left|\begin{matrix} t=4x \\ dt=(4x)'=4dx \\ dx=\dfrac{dt}{4}\end{matrix}\right|=\int\cos t\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int\cos tdt=\left\{\begin{matrix}\text{формула 7}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin 4x+C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx=\left|\begin{matrix} t=9x+1 \\ dt=(9x+1)'=9dx \\ dx=\dfrac{dt}{9}\end{matrix}\right|=\int e^t\frac{dt}{9}=\frac{1}{9}\int e^tdt=\left\{\begin{matrix}\text{формула 6}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{9}e^t+C=\frac{1}{9}e^{9x+1}+C.$$

$$в)\int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{matrix} t=2-x^2 \\ dt=(2-x^2)'=-2xdx \\ xdx=\dfrac{dt}{-2} \end{matrix} \right| = \int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5 dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

Интегрирование по частям.

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \frac{dx}{x}$	$dV = P_n(x)dx \to$ $\to V = \int P_n(x)dx$
$\int \arcsin kx\,P_n(x)dx$	$U = \arcsin kx \to dU = \frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\,P_n(x)dx$	$U = \arccos kx \to dU = -\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \operatorname{arctg} kx\,P_n(x)dx$	$U = \operatorname{arctg} kx \to dU = \frac{kdx}{1+k^2x^2}$	

$\int \operatorname{arcctg} kx\, P_n(x)dx$ $n=0,1,2,\ldots$	$U=\operatorname{arcctg} kx \to dU=-\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, где $a_0\neq 0$.

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

$a)\ \int (3x-1)\sin 2x dx;\qquad б)\ \int (1+2x)\ln x dx.$

Решение.

$$а)\ \int (3x-1)\sin 2x dx=\left| \begin{matrix} U=3x-1\to dU=3dx \\ dV=\sin 2x dx\to V=-\dfrac{\cos 2x}{2} \end{matrix} \right|=(3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2})+\int \frac{\cos 2x}{2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{2}\int \cos 2x dx=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C.$$

$$б)\ \int (1+2x)\ln x dx=\left| \begin{matrix} U=\ln x\to dU=\dfrac{dx}{x} \\ dV=(1+2x)dx\to \\ V=\int (1+2x)dx=x+x^2 \end{matrix} \right|=\ln x(x+x^2)-\int (x+x^2)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x(x+x^2)-\int (1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f\left(x \right)$, непрерывной на отрезке $\left[a,b \right]$, вычисляется по формуле:

$$\int\limits_a^b f\left(x \right)dx=F\left(x \right)\Big|_a^b=F\left(b \right)-F\left(a \right), \qquad (5)$$

где $F\left(x \right)$— первообразная для функции $f\left(x \right)$, т. е. $F'\left(x \right)=f\left(x \right)$.

Формула (5) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

$$1)\int\limits_a^b f\left(x \right)dx=-\int\limits_b^a f\left(x \right)dx; \qquad 2)\int\limits_a^a f\left(x \right)dx=0;$$

$$3)\int\limits_a^b f\left(x \right)dx=\int\limits_a^c f\left(x \right)dx+\int\limits_c^b f\left(x \right)dx;$$

$$4)\int\limits_a^b \left(f\left(x \right)+g\left(x \right) \right)dx=\int\limits_a^b f\left(x \right)dx+\int\limits_a^b g\left(x \right)dx;$$

$$5)\int\limits_a^b Cf\left(x \right)dx=C\int\limits_a^b f\left(x \right)dx,\ C-\text{const};$$

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$;

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx, \qquad (6)$$

где $\alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b),\ t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

$$\int\limits_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU, \qquad (7)$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^3 (x^2 - 16x + 3)dx$

Решение.

$$\int\limits_1^3 (x^2 - 16x + 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 16\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 8\cdot 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 8\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) = \left(\frac{27}{3} - 72 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} - 8 + 3\right) =$$

$$= (9 - 63) - \left(\frac{1}{3} - 5\right) = -54 - \frac{1}{3} + 5 = -49 - \frac{1}{3} = -49\frac{1}{3}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\frac{7}{x^2+16} - \frac{x^4+5}{x^5} + 3\sqrt{x}\right)dx \qquad \int\left(\frac{5}{5x^2+5} + 7^x - \frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$

2) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}} - \frac{2x^2+10}{x} + 4\sqrt[6]{x^5}\right)dx \qquad \int\left(\frac{2}{2x^2+2} + 2^x - \frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$

3) $\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^2+3}} + 4e^x\right)dx \qquad \int\left(\frac{12}{3+3x^2} - 3\cos x + \frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$

4) $\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}} + \frac{6+x^3}{x^4} - 3\sqrt[8]{x^5}\right)dx \qquad \int\left(\frac{6}{2x^2+2} - 2\sin x + 3^x\right)dx$

5) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4x^2-1}{x^3} - 2\sqrt[8]{x^3}\right)dx \qquad \int\left(\frac{6}{3x^2-9} + \frac{3\sin^3 x - 5}{\sin^2 x}\right)dx$

6) $\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x}-5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ $\int\left(\frac{16}{2x^2-8}-\frac{3-x^3}{x^4}+5^x\right)dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$ $\int\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\int e^{1-3x}\,dx$

2) $\int(2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$ $\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ $\int e^{6x+5}\,dx$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx$ $\int\sin\frac{x}{2}dx$ $\int\frac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}dx$ $\int\cos 2x\,dx$ $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ $\int\sin 2x\,dx$ $\int 3^{7x-1}\,dx$

6) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int\sin(2-3x)dx$ $\int\frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

1) $\int(7x-1)\cos x\,dx$ $\int\operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int(6-5x)e^x\,dx$ $\int(7x+5)\ln x\,dx$

3) $\int x\cos x\,dx$ $\int\operatorname{arcctg} x\,dx$

4) $\int(1+2x)\cos x\,dx$ $\int\arcsin x\,dx$

5) $\int(8x-1)\sin 5x\,dx$ $\int(6+5x)\ln x\,dx$

6) $\int xe^x\,dx$ $\int(3x+2)\ln x\,dx$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2\left(x^3+10x\right)dx$

2) $\int_{-2}^3\left(3x^2+6x-2\right)dx$

3) $\int_1^3\left(x^2-16x+3\right)dx$

4) $\int_0^8\left(21x-19\right)dx$

5) $\int_{-4}^0\left(x^3+8\right)dx$

6) $\int_{10}^{13}\left(2x+7\right)dx$

Практическая работа № 9

Тема: **Дифференцирование функций.**

Цель: закрепить навыки дифференцирования функций, в том числе обратных тригонометрических.

Материальное обеспечение: методические указания, таблица производных (формул и правил дифференцирования).

Вводный контроль:

1. Что называют производной функции? Запишите формулу.
2. В чем состоит механический и геометрический смысл производной?
3. Сформулируйте и запишите правила дифференцирования.
4. Запишите формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций (для случаев простых и сложных функций).
5. Как найти производную второго порядка функции? В чем состоит ее механический смысл?
6. Что называют производной n-го порядка? Каков алгоритм ее нахождения?

Порядок выполнения работы:

Задание 1. Найти производную функции $y=(3x-1)^2(x+1)^3$.

Решение. Применим правило дифференцирования произведения:

$(uv)`=u`v+uv`$

и формулу производной сложной функции:

$(u^n)`=nu^{n-1}u`$,

получим

$y`=((3x-1)^2)'(x+1)^3+(3x-1)^2((x+1)^3)'=2(3x-1)3(x+1)^3+(3x-1)^2 3(x+1)^2=$
$=3(3x-1)(x+1)^2(2x+2+3x-1)=3(3x-1)(x+1)^2(5x+1)$

Задание 2. Найти производную функции $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. Применим правило дифференцирования частного:

$(\frac{u}{v})`=\frac{u`v-uv`}{v^2}$

и формулу производной сложной функции:

$(\sqrt{u})`=\frac{u`}{2\sqrt{u}}$,

получим

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'\sqrt{x^2+1}-(2x-1)(\sqrt{x^2+1})`}{x^2+1}=\frac{2\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{2x^2+2-2x^2+x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{2+x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Задание 3. Найти производную функции $y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$.

Решение. Применим формулы производной сложной функции:

$(a^u)`=a^u u`\ln a$

$(\sqrt{u})` = \frac{u`}{2\sqrt{u}}$,

получим

$$y' = 16^{\sqrt{x^3+6x+14}} \ln 16 (\sqrt{x^3+6x+14})' = 16^{\sqrt{x^3+6x+14}} \ln 16 \frac{3x^2+6}{2\sqrt{x^3+6x+14}}.$$

Задание 4. Найти производную функции y= $\ln(\sqrt{9t^2+2}+3t)$.

Решение. Применим формулы производной сложной функции:

$(\ln u)` = \frac{u`}{u}$

$(\sqrt{u})` = \frac{u`}{2\sqrt{u}}$

получим

$$y' = \frac{\frac{9t}{\sqrt{9t^2+2}}+3}{\sqrt{9t^2+2}+3t} = \frac{9t+3\sqrt{9t^2+2}}{\sqrt{9t^2+2}(\sqrt{9t^2+2}+3t)} = \frac{3(3t+\sqrt{9t^2+2})}{\sqrt{9t^2+2}(\sqrt{9t^2+2}+3t)} = \frac{3}{\sqrt{9t^2+2}}$$

Задание 5. Найти производные первого и второго порядка функции y=x-arctgx.

Решение. Применим правило дифференцирования разности:

(u-v)\`=u\`-v\`,

получим

$$y' = (x)' - (arctgx)' = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Вторично дифференцируя, по правилу производной частного имеем:

$$y`' = (\frac{x^2}{1+x^2})` = \frac{(x^2)`\cdot(1+x^2) - x^2\cdot(1+x^2)`}{(1+x^2)^2} = \frac{2x\cdot(1+x^2) - x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x+2x^3-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Задание 6. Найти производную функции y=arcsin(1-2x).

Решение. Применим формулу производной сложной функции:

$(\arcsin u)` = \frac{u`}{\sqrt{1-u^2}}$,

получим

$$y' = \frac{-(1-2x)'}{\sqrt{1-1+4x-4x^2}} = \frac{2}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x(1-x)}.$$

Решите задачи по индивидуальному варианту:

Вариант № 1

Найти производные функций:

1) s= $t^2\sqrt[3]{t}$;

2) $y = ax^5 + bx^4 + ax^3 + b^3$ (a, b – числа)

3) y= $\frac{x^3+3x^2}{3x-1}$;

4) y= $\sqrt{(2-x)(3-2x)}$;

5) y= $\sqrt{e^x}$;

6) y=ln(3x^2+4x-7);

7) y=sinxcosx;

8) y=tgx-x;

9)y=arcsinx+$\sqrt{1+x^2}$;

10) Доказать, что, если тело движется по закону S=ae^t+be^{-t}, то его ускорение равно пройденному пути.

Вариант № 2

Найти производные функций:

1) y=x $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$;

2) $y=(a+b)x^8+(a+b)^3$ (a, b - числа)

3) y=$\dfrac{3x^2-2x-4}{2x-1}$;

4) y=(3t^5-5t^3+9)$^{10;}$

5) y=(e^{3x}-1)$^{2;}$

6) y=$\dfrac{1}{\ln x}$;

7) y=-4ctg^{3}x;

8) y=arcsin3x;

9) y=arctg $\sqrt{x^2+2x}$;

10) Найти момент времени t, в который ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону s(t) = -t^3+3t^2-8, равно 0. Какова при этом скорость точки?

Вариант № 3

Найти производные функции

1) $y=\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{4}x^4-3x^2+9$;

2) $y=3mx^n+2nx^m$ (m, n - числа)

3) $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$;

4) y=$x^2\sqrt{4x-3}$;

5) y=$e^{(3x+5)^2}$;

6) y=(lnx)$^{3;}$

7) y=$\sqrt{1+2\sin x}$;

8) y=arcsin$\dfrac{x}{6}$;

9) y =$\sqrt{4x-1}-arctg\sqrt{4x-1}$;

10) Тело движется по закону s(t)=1-2t+t^3 (м). Найти его скорость и ускорение в момент времени t=3 с.

Рекомендуемая литература

Основные источники

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2011
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М: Издательский центр «Академия», 2011
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2009
4. Дадаян А.А. Математика: учеб.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005

Дополнительные источники

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007
2. Математика и информатика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В./ - М.: Издательский центр «Академия», 2009
3. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образовательных учреждений нач. и сред. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
4. Спирина М.С. дискретная математика: учеб. – М.: Издательский центр «Академия», 2006
5. Омельченко В.П. Математика. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2006